Лекция № 4

**Функциональные ряды**

***п. 1. Функциональные последовательности***

*Определение 1*. *Пусть дана последовательность функций , определенных в некоторой области. Говорят, что функция , является в этой области пределом функциональной последовательности , если для каждой точки  области: .*

Если  является пределом последовательности , то пишут:

.

*Определение 2*. *Последовательность функций  сходится к функции * ***равномерно*** *в некоторой области, если для каждого 0 существует такое , что при  и при любом  из данной области справедливо: .*

Геометрически равномерная сходимость означает неограниченное приближение графиков функций  к графику  в точках их наибольшего взаимного удаления.

Аналогично определяется понятие суммы  функционального ряда .

* 1. ***п. 2. Функциональные ряды. Основные понятия***

Пусть дана последовательность функций , определенных в некоторой

области.

*Определение 3*. *Ряд, членами которого являются функции , называется* ***функциональным рядом***:

 (1)

Придавая  определённое значение , мы получим числовой ряд , который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

*Определение 4*. *Если полученный числовой ряд сходится, то точка  называется* ***точкой сходимости ряда*** *(2.1); если же ряд расходится –* ***точкой расходимости*** *функционального ряда.*

*Определение 5*. *Совокупность числовых значений аргумента , при которых функциональный ряд сходится, называется* ***областью сходимости ряда****.*

В общем случае, область сходимости – совокупность интервалов (конечных, бесконечных) и точек.

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от *х*:  = . Определяется она в области сходимости равенством: ,

где  - частичная сумма ряда.

*Определение 6*. *Функциональный ряд  называется* ***сходящимся к некоторой области D равномерно****, если в этой области последовательность его частичных сумм  сходится равномерно к своей предельной функции .*

***Теорема (****Признак Вейерштрасса)*. Функциональный ряд ,каждый член которого является функцией, определенной на сегменте , сходится равномерно на этом сегменте, если существует такая последовательность  положительны чисел, что для любого  из  и любого , а ряд сходится.

Если члены функционального ряда (2.1) определены и непрерывны на сегменте , и ряд (2.1) сходится равномерно на этом сегменте, то сумма ряда будет *непрерывной* функцией на .

Равномерно сходящиеся на ряды можно *почленно дифференцировать и интегрировать на этом сегменте.*

*Пример* *1.* Найти область сходимости ряда .

*Решение*. Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем  = . Следовательно, этот ряд сходится при , т.е. при всех ; сумма ряда равна , , при .

*Пример* 2. Исследовать сходимость функционального ряда .

*Решение.* Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:



Так как, при любом  имеет место соотношение , а ряд с общим членом  сходится (обобщённый гармонический ряд, *p*=2>1), то ряд сходится равномерно при . Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при всех .

***п. 3 Степенные ряды***

Среди функциональных рядов в математике и её приложениях особую роль играет степенной ряд:

 (2)

Действительные числа , , , …,, … называются коэффициентами ряда (2.2),  - действительная переменная.

Ряд (2.2) расположен по степеням . Рассматривают также степенной ряд более общего вида по степеням :

, (3)

где  - некоторое постоянное число.

Ряд (2.3) легко приводится к виду (2.2), если положить =. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (2).

***Сходимость степенных рядов***

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

***Теорема.* (Абель).** *Если степенной ряд* *(.2) сходится при , то он абсолютно сходится при всех значениях , удовлетворяющих неравенству:  < .0*

*Доказательство.*

**

Таким образом, каждый член ряда (2) не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда геометрической прогрессии (), поэтому по признаку сравнения для  * < * ряд сходится абсолютно.

***Следствие.*** *Если ряд (2) расходится при = , то он* расходится и при всех , удовлетворяющих неравенству  > .

*Доказательство.*



***Интервал и радиус сходимости степенного ряда***

###### Из теоремы Абеля следует, что существует число , при котором интервал *(-R; R)* состоит из точек абсолютной сходимости ряда (2), а при значениях *х* вне этого интервала > *R* ряд (2) расходится.

Интервал *(-R; R)* называют ***интервалом сходимости степенного ряда***, а число *R* ***радиусом сходимости степенного ряда*.**

В частности, когда ряд (2) сходится лишь в одной точке  = 0, то считаем, что *R* = 0. Если же ряд (2) сходится при всех значениях *х*  *R* (т.е. во всех точках числовой оси), то считаем, что *R* = .

Отметим, что на концах интервала сходимости (т.е. при *x* = *R* и при *x* = *-R*) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (2.2) можно поступить следующим образом.

Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда  и применим к нему признак Даламбера.

Допустим, что существует предел:

 =, .

По признаку Даламбера ряд сходится, если

, т.е. .

Ряд, составленный из модулей членов ряда (2.2), расходится при тех значениях *х*, для которых  >.

Таким образом, для ряда (2.2) радиус абсолютной сходимости можно найти по формуле:

. (4)

Аналогично, можно получить еще одну формулу радиуса сходимости степенного ряда, применив радикальный признак Коши:

. (5)

Замечания.

1. Если  = 0, то можно убедиться, что ряд (2) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае *R* = . Если , то *R* = 0.
2. Интервал сходимости степенного ряда  (3) находят из неравенства , т.е. интервал имеет вид ( *-* ;+ ).
3. Можно всегда непосредственно применять признаки Даламбера или радикальный признак Коши к ряду, составленного из модулей членов данного ряда.

***Решение типовых примеров***

В примерах 3-5 найти область сходимости ряда.

*Пример* 3. .

*Решение*. Воспользуемся формулой (4):

 = .

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

*Пример* 4 . 

*Решение*. Заданный ряд неполный (содержит только нечетные степени). Воспользуемся непосредственно признаком Даламбера:

,, .

Ряд абсолютно сходится, если < 1 или –1 < *x* < 1. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При *х* = -1 имеем ряд –1+ -  + -…, который сходится по признаку Лейбница, причем, сходится условно.

При *х* = 1 имеем ряд +1 -  +  - +…, это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок [-1;1].

*Пример* 5. .

*Решение*. Находим радиус сходимости ряда по формуле (4):

.

Следовательно, ряд сходится при –2 < *x*+2 < 2, т.е. при –4 < *x* < 0.

При *х* = -4 имеем ряд, который сходится по признаку Лейбница условно.

При *х* = 0 имеем расходящийся ряд . Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуинтервал [-4;0).

***Свойства степенных рядов***

1. Сумма *S(x)* степенного ряда  является непрерывной функцией в интервале сходимости (-*R;R*).
2. Степенные ряды и , имеющие радиусы сходимости соответственно  и , можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел  и .
3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда:



при – *R < x < R* выполняется равенство:



1. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости и при *–R <x <R* выполняется равенство:



Ряды, полученные после дифференцирования и интегрирования имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближённых вычислениях.

В примере 1 пункта 2 была получена формула , при .

Перепишем ее следующим образом

Заменим в данном равенстве «х» на «-х». Получим новое равенство

Применим для полученного ряда свойство 4, проинтегрировав его на интервале , где . Получим:

Находим интегралы и получаем следующее разложение:

В интервал сходимости данного ряда попадает число х=1, т.к. в этом случае получаем лейбницевский ряд.

Аналогично можно получать разложения в ряды и для других функций, в частности



Данный разложение получают, заменив в равенстве «х» на «х2», а затем проинтегрировав, полученное равенство на интервале , где .

Литература.

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 14, параграф 63, 64.
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», раздел 5, глава 14 п. 14.1.